Soluție

1.a) $\text{Det}(A) = abc \neq 0$.

b) Prin inducție după *n*.

c) $A^{-1} = \begin{pmatrix} a^{-1} & a^{-1}-b^{-1} & a^{-1}-b^{-1} \\ 0 & b^{-1} & b^{-1}-c^{-1} \\ 0 & 0 & c^{-1} \end{pmatrix}$.

2.a) Pentru $x = -1$ rezultă $f(-1) = f^2(-1) + 3f(-1) + 1$, deci $f(-1) = -1$.

b) Restul împărțirii polinomului f la $X - 5$ este $f(5)$. Pentru $x = 0$ rezultă $f(1) = f^2(0) + 3f(0) + 1 = 1$.

Pentru $x = 1$ rezultă $f(5) = f^2(1) + 3f(1) + 1 = 5$.

c) Fie şirul de numere reale $(a_n)_{n\geq 0}$ definit prin $a_0 = 0$ *şi* $a_{n+1} = a_n^2 + 3a_n + 1, \forall n \geq 0$.

Prin inducție rezultă $f(a_n) = a_n$ și $a_n < a_{n+1}$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$, deci şirul are o infinitate de termeni diferiți. Ca urmare, polinomul $h = f - X$ se anulează în fiecare dintre termenii şirului, adică de o infinitate de ori, deci $f - X = 0$, adică $f = X$.